量子光学学报 3(4):214～218,1997
Acta Sinica Quantum Optica

原子动量的量子测量*

张俊香　王军民　杨炜东　张天才
(山西大学光电研究所 太原 030006)

摘要 我们讨论了一个二能级原子与光场相互作用系统,在远离共振的情况下,当光子与原子之间发生了动量交换时,通过对光场与原子之间纠缠态的测量,得知原子的动量信息。

关键词　动量交换,量子测量

中图法分类号　O431

原子与光场的相互作用是量子光学研究的重要内容之一,标准的 Jaynes-Cummings 模型(JCM)[1],提供了对这一问题的精确解。JCM 的进一步发展揭示了许多非经典效应,如原子崩塌、复原、压缩以及非线性耦合、量子关联等[2~7],在以上这些讨论中,往往都考虑原子的内部自由度与光场的相互作用,而把原子看作是静止的粒子,忽略原子的空间自由度,也即基于以下两个假定:(1)与光波长比较,可认为原子的波包宽度很小;(2)原子沿光腔轴向的运动可以忽略。随着激光冷却与囚禁技术的发展,冷原子以及超冷原子的获得对标准 JCM 的两个假设提出挑战,Schlicher 首次将 JCM 作了推广,考虑了原子沿腔轴的运动,随后一系列的研究业已证明,原子的外部自由度将影响原子与场的相互作用。[8~10]

本文将讨论一个二能级原子与单模腔场相互作用系统,在考虑原子运动与空间分布情形下,当原子与光场在相互作用过程中发生动量交换时,光场与原子之间发生纠缠,光场的位相携带了原子动量信息,因而通过对光场的测量实现对原子动量的测量。

1　场与原子的相互作用

在旋波近似下,二能级原子与单模腔场相互作用模型可写为

* 国家青年科学基金(N0.19504008)及山西省青年学术带头人基金资助项目。
收稿日期:1997-12-05

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hbar\omega_a \hat{S}_z + \hbar\omega_f \hat{a}^+ \hat{a} + \hbar\Omega(\hat{a}^+ \hat{S}_- e^{-ik\hat{x}} + \hat{a}\hat{S}_+ e^{ik\hat{x}}) \tag{1}$$

其中 $\hat{a}^+$，$\hat{a}$ 代表单模光场的产生与湮灭算符，ω_f 是其频率，$\hat{S}_z$，$\hat{S}_-$，$\hat{S}_+$ 代表跃迁频率为 ω_a 的二能级原子内部动力学的自旋算符，Ω 为拉比频率，$\vec{k}$ 是光波矢量，$\hat{x}$，$\hat{p}$ 为原子在光场中的位置和外部动量算符。

原子的位置与动量之间满足测不准关系 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$

由于 $\hat{H}_0$ 与 $\hat{H}_I$ 不对易，引入一幺正算符[11]

$$\hat{U} = e^{-i\omega_f t(\hat{a}^+ \hat{a} + \hat{S}_z) + ik\hat{x}\hat{S}_z} \tag{2}$$

当忽略光子的反弹效应之后，变换后的哈密顿量为：

$$\tilde{H} = \hat{U}^+ \hat{H} \hat{U} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \hbar\Delta(P)\hat{S}_z + \hbar\Omega(\hat{a}^+ \hat{S}_- + \hat{a}\hat{S}_+) \tag{3}$$

这里 $\Delta(P) = (\omega_f - \omega_a) - \frac{kp^2}{m} = \omega_f - \left(\omega_a + \frac{kp^2}{m}\right)$ 表示原子能级的多普勒移动包含在内。

$$e^{\pm ikx} | p >= | p \pm \hbar k >$$

其态矢演化遵循薛定谔方程：

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\tilde{\psi}(t) >= \tilde{H} |\tilde{\psi}(t) > \tag{4}$$

$|\tilde{\psi}(t) >$ 按初始基矢展开为：

$$|\tilde{\psi}(t) >= \int \mathrm{d}p \sum \varphi_{p,e,n}(t) | p, e, n > + \psi_{p-\hbar k, g, n+1}(t) | p - \hbar k, g, n+1 > \tag{5}$$

将(3)式代入(4)和(5)式得

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_{p,e,n}(t) = - iA\varphi_{p,e,n}(t) - i\sqrt{n+1}\,\Omega\varphi_{p-\hbar k, g, n+1}(t) \\ \dot{\varphi}_{p-\hbar k, g, n+1}(t) = - iB\varphi_{p-\hbar k, g, n+1}(t) - i\sqrt{n}\,\Omega\varphi_{p,e,n}(t) \end{cases} \tag{6}$$

$$A = \frac{p^2}{2m\hbar} - \Delta(p)$$

$$B = \frac{(p - \hbar k)^2}{2m\hbar} + \Delta(p - \hbar k)$$

方程(6)经 拉氏变换及反演得：

$$\begin{aligned} \varphi_{p,e,n}(t) =& \exp\left(-\frac{i(A+B)t}{2}\right)\cos\left(\frac{t\sqrt{4(n+1)\Omega^2 + (B-A)^2}}{2}\right)\varphi_{p,e,n}(0) \\ &+ \frac{i(B-A)}{\sqrt{4(n+1)\Omega^2 + (B-A)^2}}\exp\left(-\frac{i(A+B)t}{2}\right) \\ &\cdot \sin\left(\frac{t\sqrt{4(n+1)\Omega^2 + (B-A)^2}}{2}\right)\varphi_{p,e,n}(0) \end{aligned}$$

$$\frac{p^2 - 2\hbar kp + \hbar^2 k^2}{2m\hbar} + \Delta\omega - \overline{k(p-\hbar k)^2}$$

$$-\frac{2i\sqrt{n+1}\Omega}{\sqrt{4(n+1)\Omega^2+(B-A)^2}}\exp\left(-\frac{i(A+B)t}{2}\right)$$

$$\cdot\sin\left(\frac{t\sqrt{4(n+1)\Omega^2+(B-A)^2}}{2}\right)\varphi_{p-\hbar k,g,n+1}(0)$$

$$\varphi_{p-\hbar k,g,n+1}(t)=\exp\left(-\frac{i(A+B)t}{2}\right)\cos\left(\frac{t\sqrt{4(n+1)\Omega^2+(B-A)^2}}{2}\right)\varphi_{p-\hbar k,g,n+1}(0)$$

$$+\frac{i(B-A)}{\sqrt{4(n+1)\Omega^2+(B-A)^2}}\exp\left(-\frac{i(A+B)t}{2}\right)$$

$$\cdot\sin\left(\frac{t\sqrt{4(n+1)\Omega^2+(B-A)^2}}{2}\right)\varphi_{p-\hbar k,g,n+1}(0)$$

$$-\frac{2i\sqrt{n+1}\Omega}{\sqrt{4(n+1)\Omega^2+(B-A)^2}}\exp\left(-\frac{i(A+B)t}{2}\right)$$

$$\cdot\sin\left(\frac{t\sqrt{4(n+1)\Omega^2+(B-A)^2}}{2}\right)\varphi_{p,e,n}(0) \tag{7}$$

对初始基矢 $\varphi(0)$ 有：

$$\begin{cases}\varphi_{p,e,n}(0)=\varphi_p(0)\varphi_e(0)\varphi_n(0)\\ \varphi_{p-\hbar k,g,n+1}(0)=\varphi_{p-\hbar k}(0)\varphi_g(0)\varphi_{n+1}(0)\end{cases} \tag{8}$$

当光场初始为相干态 $|\alpha>=\sum C_n|n>$ 时，$C_n=e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$，取 Fock 态为光场的基矢。则

$$\begin{cases}\varphi_{p,e,n}=\varphi_p(0)\varphi_e(0)C_n(0)\\ \varphi_{p-\hbar k,g,n+1}=\varphi_{p-\hbar k}(0)\varphi_g(0)C_{n+1}\end{cases} \tag{9}$$

2　光场与原子的纠缠

假定失谐量 $\delta\omega=(\omega_f-\omega_a)$ 很大，即 $\Omega<<\delta\omega$，则对下式可取一阶近似：

$$\sqrt{4(n+1)\Omega^2+(B-A)^2}\approx(B-A)+\frac{2(n+1)\Omega^2}{(B-A)} \tag{10}$$

方程(7)简化为：

$$\begin{cases}\varphi_{p,e,n}(t)=\exp\left(\frac{-i(B-A)t}{2}\right)\exp\left[\frac{i\left((B-A)+\frac{2(n+1)\Omega^2}{B-A}\right)t}{2}\right]\varphi_{p,e,n}(0)\\ \varphi_{p-\hbar,g,n+1}(t)=\exp\left(\frac{-i(B-A)t}{2}\right)\exp\left[\frac{i\left((B-A)+\frac{2(n+1)\Omega^2}{B-A}\right)t}{2}\right]\varphi_{p-\hbar,g,n+1}(0)\end{cases} \tag{11}$$

联立(11)、(9)、(5)方程得：

$$|\tilde{\psi}(t)>=\int \mathrm{d}p\exp\left(\frac{-i(A+B)t}{2}\right)\left[\mathrm{e}^{\frac{i\Omega^2 t}{B-A}}\cdot\varphi_p(0)\varphi_e(0)|p,e>|\alpha\exp\left(i\frac{\Omega^2 t}{B-A}\right)>\right.$$

$$\left.+\mathrm{e}^{\frac{-i\Omega^2 t}{B-A}}\varphi_{p-\hbar k}(0)\ \varphi_g(0)|p-\hbar k,g>|\alpha\exp\left(i\frac{\Omega^2 t}{B-A}\right)\right] \tag{12}$$

上述结果表明，初始为 $|\alpha>$ 状态的光场，经过与动量为 p 的原子发生相互作用，其状态变为 $|\alpha\exp\left(i\frac{\Omega^2 t}{B-A}\right)>$，光场的位相因子携带着原子动量的信息，也 即原子与光场之间发生了纠缠。

例如： 可以对光场的正交位相分量 X_1 或 X_2 进行测量，此时

$$<X_{1t}>=<a+a^+>=\alpha\mathrm{e}^{i\frac{\Omega^2 t}{B-A}}+\alpha^*\mathrm{e}^{-i\frac{\Omega^2 t}{B-A}}$$

$$\approx 2Re\alpha-2Im\alpha\cdot\left(\frac{\Omega^2 t}{B-A}\right)$$

$$<X_{10}>=2Re\alpha$$

所以 $$<X_{10}>-<X_{1t}>=2Im\alpha\cdot\left(\frac{\Omega^2 t}{B-A}\right)$$

而 $$<\delta X_{1t}>=<\delta X_{10}>$$

由此我们可看出，光场与原子相互作用后，光场的信噪比降低，$\left(\left(\frac{S}{N}\right)_t<\left(\frac{S}{N}\right)_0\right)$，，其中降低的量为 $\frac{2\Omega^2 t}{B-A}\cdot Im\alpha$，由于 $B-A=2\delta\omega-\frac{kp}{m}(2p+1)$ 包含原子动量信息，所以，信噪比的降低量可反映出原子动量的信息。

3　结论

在旋波近似下，一个二能级原子与单模腔场在远离共振情况下，发生相互作用后，原子与光场之间发生了很好的纠缠，通过对光场的测量，(如上例所述，对光场正交位相分量的信噪比的测量)即可描述出原子的空间运动分布。

参考文献

1 E. T. Jaynes, F. W. Cummings. *Proc. IEEE.*, 1963, **51**:89

2 J. H. Eberly, N. B. narozhny, J. J. Sanchez-Nondragon. *Phys. Rev. Lett.*, 1980, **44**:1323

3 S. Haroche, J. M. Raimond. *Adv. At. Mol. Phys.*, 1985, **20**:347

4 S. J. D. Phoenix, P. L. Knight. *Phys. Rev. A*, 1991, **44**:6023

5 B. Buck, C. V. Sukumar. *Phys. Rev. Lett.*, 1981, **81A**:132

6 W. Vogel, D. G. Welsch. *Phys. Rev. A*, 1989, **40**:7113

7 H. I. Yoo, J. H. Eberly. *Phys. Rep.*, 1985, **118**:239

8 R. R. Schlicher. *Opt. Commun.*, 1989, **70**:97

9 P. Storey, M. Collett, D. Walls. *Phys. Rev. Lett.*, 1992, **68**:472

10 A. Vaglica. *Phys. Rev.* A52, 1995, **3**:2319

11 Wang X. G, Sun C. P. *J. Mod. Opt.*, 1995, **42**:515

Quantum Measurement of Atom Momentum

Zhang Junxiang　Wang Junming　Yang Weidong　Zhang Tiancai

(*Institute of Opto-electronics Shanxi University, Taiyuan* 030006)

Abstract

The interaction of a cold atom with a single mode field is studied. In the case of large detuning, the momentum exchanging between atom and field results in the entanglement of atom and light. As a result, the measurement of momemtum of atom can be accomplished from the measurement of light field.

Key Words　the momentum exchange, quantum measurement